Dossier n°3 : Exemples de description et d'étude d'expériences aléatoires à l'aide d'une variable aléatoire.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 21 août 2003.
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

L'étude des probabilités commence en Première S et ES.

On introduit la notion de variable aléatoire en Première S ainsi que les lois de variable aléatoire, l'espérance, le variance et l'écart type.

Cette étude se poursuit en Terminale S avec l'indépendance de deux variables aléatoires, la loi de Bernoulli, la loi binomiale et quelques exemples de lois continues.

Je choisis donc de situer ce dossier en Première S et Terminale S.

II Commentaires généraux.

II.1 A propos du sujet.

Au cours d'une expérience aléatoire, on est souvent amené à attribuer un nombre à une issue et à calculer la probabilité de cette issue. La notion de variable aléatoire est la formalisation probabiliste de cette situation :

Définition 1 :

E est l'univers associé à une expérience aléatoire. Toute fonction définie sur E, à valeurs dans IR est appelée une variable aléatoire.

On relie ensuite cette notion au calcul de probabilités :

Définition 2 :

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers E d'une expérience aléatoire. Soit I = $\{x_1, \ldots, x_m\}$ l'ensemble des valeurs de X. La loi de X est la fonction définie sur I qui à chaque x_i associe le nombre $P(X=x_i)$.

L'objectif de ce dossier est donc de présenter des expériences aléatoires qu'il est possible de décrire et/ou d'étudier à l'aide d'une variable aléatoire.

II.2 A propos des exercices.

J'ai donc choisi, pour illustrer ce dosser, de vous présenter quatre exercices :

- l'exercice n°1 est un exemple d'étude d'une issue d'une expérience aléatoire à l'aide d'une variable aléatoire ;
- l'exercice n°2 est un exemple d'expérience aléatoire décrite au moyen d'une variable aléatoire ;
- l'exercice n°3 propose l'étude d'une expérience aléatoire au moyen de trois variables aléatoires ;
- l'exercice n°4 propose l'étude d'une situation décrite au moyen d'une variable aléatoire.

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.

But : On tire dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à 3 (dans des proportions données) successivement et avec remis deux boules et on cherche la probabilité que la somme des numéros soit impaire.

Méthode : On considère la variable aléatoire X qui à tout couple de boules associe la somme de leur numéro.

Objectif : Calculer une probabilité à l'aide d'une variable aléatoire.

Outils : dénombrement.

III.2 Exercice n°2.

But : Déterminer la note que peut espérer un élève ayant répondu au hasard à un QCM.

Méthode : On considère la variable aléatoire N désignant la note obtenue.

Outils :

- ***Définition 3 :***

On appelle espérance mathématique de X le nombre E(X) = $\sum_{i=1}^{m} x_i P(X = x_i)$ (X discrète).

III.3 Exercice n°3.

But : Calculer des probabilités liées à deux séries de trois appels téléphoniques.

Méthode : On considère trois variables aléatoires :

- X qui compte le nombre de correspondants obtenus lors de la première série d'appels ;
- Y qui compte le nombre de correspondants obtenus lors de la deuxième série ;
- Z qui compte le nombre total de correspondants obtenus.

Outils :

- Définition 2 ;
- Définition 3 ;
- ***Définition 4*** :

On dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une loi binomiale de paramètres n et p lorsque :

- **l'ensemble de ses valeurs est {0, 1, …, n} ;**
- **pour tout entier k compris entre 0 et n, la probabilité de l'événement (X=k) est $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.**

- Combinaisons ;
- Probabilités conditionnelles ;
- Epreuve de Bernoulli.

III.4 Exercice n°4.

But : Etudier la désintégration d'un noyau (ce qui peut être considéré comme une expérience aléatoire car on n'en connaît pas l'issue a priori).

Méthode : Cette désintégration est modélisée par une loi exponentielle de paramètre λ à déterminer à l'aide d'une condition donnée.

Outils :

- ***Définition 5*** :

  On dit qu'une variable aléatoire X est continue s'il existe une fonction f définie sur IR, continue sur IR sauf peut-être en quelques points, positive et telle que, quel que soit l'intervalle I de IR, $P(X \in I)$ est égale à l'intégrale de f sur I notée $\int_I f(x)dx$.

  La fonction f est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X.
- ***Définition 6*** :

  Une variable aléatoire continue est dite exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est la fonction f définie sur [0 ;+∞[par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ sinon.
- Probabilités conditionnelles ;
- ***Définition 7*** :

  Soit X une variable aléatoire continue dont la loi admet une densité définie sur un intervalle $[\alpha ; \beta]$ de IR. Alors $E(x) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ est l'espérance de X.

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (n°24 p 227, Transmath 1ère S 2001, modifié).

Une urne contient n boules (n multiple de 6). Un tiers de ces boules portent le n°1, un sixième le n°2 et la moitié de n°3. On effectue au hasard deux tirages successifs avec remise. On souhaite calculer la probabilité P que la somme des numéros des boules tirées soit impaire.

1. Montrer que l'expérience compte n^2 issues possibles.
2. Soit X la variable aléatoire qui à tout couple de deux boules associe la somme de leurs numéros. Quelles sont les valeurs de X ? En déduire que la probabilité cherchée est celle de la réunion des évènements (X=3) et (X=5).
3. Justifier que le calcul de P(X=3) nécessite de trouver le nombre de couples (a,b) avec (a = 1 et b=2) ou (a=2 et b=1) où a est le numéro de la première boule et b celui de la deuxième.
4. Prouver que ce nombre est $\frac{n^2}{9}$ et en déduire P(X=3).
5. Calculer P(X=5). En déduire P.

IV.2 Exercice n°2 (n°60 p 232, Transmath 1ère S 2001).

Un élève répond au hasard à un QCM qui comporte cinq questions. A chaque question, deux réponses sont proposées, dont une seule est correcte. Le correcteur attribue quatre points pour une réponse exacte mais enlève deux points pour une réponse fausse. Lors de la note finale, il porte 0 pour tout total négatif ou nul. Ainsi, la note finale N est une variable aléatoire définie sur l'ensemble de toutes les réponses équiprobables au QCM.

Quelle note moyenne peut espérer l'élève ?

IV.3 Exercice n°3 (n°29 p 313, Transmath TS 2002).

Une personne appelle successivement trois correspondants. On admet que chaque appel est indépendant du précédent et que, quel que soit le correspondant appelé, la probabilité de l'obtenir est p ($0 < p < 1$) et celle de ne pas l'obtenir est $q = 1-p$.

1. X est la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de correspondants obtenus au cours de ces trois appels. Déterminer la loi de X.
2. Après ces trois appels, la personne procède, dans les mêmes conditions, à un second appel des correspondants qu'elle n'a pas pu joindre la première fois. On désigne par Y le nombre de correspondants obtenus dans cette seconde série d'appels. Déterminer la loi de Y.
3. On désigne par Z le nombre total de correspondants obtenus après ces deux séries d'appels. Alors Z = X+Y.
   a) Démontrer que Z suit la loi binomiale de paramètres 3 et $1-q^2$.
   b) On suppose que $p = \frac{1}{3}$. Calculer E(X), E(Y) et E(Z).
   c) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près par excès de la valeur minimale de p telle que $P(Z=3) > 0,5$.

IV.4 Exercice n°4 (n°4 p 239, Fractale TS 2002).

La désintégration d'un noyau radioactif exprimée en années est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). Une étude portant sur ces noyaux conduit à une durée de vie inférieure ou égale à 100 ans pour 5% d'entre eux.

1. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.
2. Calculer la probabilité pour que la désintégration d'un noyau soit inférieure à 150 ans.
3. En déduire la probabilité pour que la désintégration d'un noyau dure au moins 150 ans.
4. Sachant qu'un noyau n'est toujours pas désintégré au bout de 150 ans, calculer la probabilité pour qu'il ne soit pas désintégré au bout de 200 ans.
5. Calculer la durée moyenne de désintégration d'un noyau.

V Correction des exercices.

V.1 Exercice n°1.

1. On peut être tenté de prendre comme issues les sommes possibles : 1+1 = 2, 1+2 = 3, 2+2 = 4, 2+3 = 5, 3+3=6. Mais on ne sait pas leur attribuer une probabilité, aucune hypothèse ne permet de dire qu'elles sont équiprobables. Un peu de réflexion fait pencher pour le cas contraire.

Les boules sont tirées au hasard, cette hypothèse implique l'équiprobabilité des tirages. On choisit de prendre pour univers l'ensemble des tirages, c'est-à-dire des couples (a,b), a est le numéro de la première boule tirée, b celui de la deuxième.

Mais se pose la question de relier ces couples à la somme des numéros apparus. Puisque à un couple on associe un réel, on introduit la variable aléatoire X : (a,b) $\rightarrow$ a+b.

Le tirage est avec remise : une même boule peut être tirée deux fois, donc on peut obtenir a = b. **Il existe n² couples du type (a ;b).**

2. **X prend les valeurs 2, 3, 4, 5, 6** (cf raisonnement de la question précédente).

On en déduit qu'obtenir une somme impaire signifie « X = 3 » ou « X = 5 ».

3. « X = 3 » signifie que les tirages (a ;b) sont tels que a+b=3. Les seuls tirages conduisant à cette somme dont représentés par les couples (1 ;2) et (2 ;1). *Tous les tirages sont équiprobables donc il s'agit de déterminer le nombre de tels couples.*

4. **Nombre d'issues favorables** : $2 \times \frac{n}{3} \times \frac{n}{6} = \frac{n^2}{9}$.

P(X=3) = $\frac{1}{9}$.

5. **P(X=5)=** $\frac{1}{6}$ d'où **P =** $\frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$.

On remarquera en particulier que cette probabilité ne dépend pas du nombre de boules présentes dans l'urne.

V.2 Exercice n°2.

Prochainement…

V.3 Exercice n°3.

Prochainement…

V.4 Exercice n°4.

Prochainement…

VI Commentaires.

a) L'exercice 4 est intéressant car on pourra le replacer dans d'autres dossiers (à venir prochainement), ce qui va permettre de limiter les exercices à connaître !

D'autre part, il permet d'abord un des nouveaux thèmes du programme de Terminale S 2002, à savoir les variables aléatoires à densité.

b) L'exercice n°1 est fait partie des exercices proposés par le Transmath où une partie de la réflexion (que je vous ai donné en correction) est donnée avec l'énoncé du sujet. Cela peut permettre d'expliquer aux élèves pourquoi on fait tel calcul, plutôt que de leur envoyer le calcul dans la figure sans explications. Cette réflexion peut être exposée à l'oral au jury lors de la résolution de l'exercice.

Il faudra pourtant parfois, avec ce type d'exercice, modifier l'énoncé afin de ne pas laisser apparaître cette réflexion. C'est ce que j'ai fait dans l'énoncé proposé. En fait, l'exercice, tel qu'il est proposé, donne une situation et un problème à résoudre. On propose à l'élève des pistes de réflexion et des questions intermédiaires se rapportant à cette réflexion puis au final, l'élève doit faire une synthèse et rédiger une solution du problème.